Nome: ______ Nº: ______
Endereço: ______ Data: ______
Telefone: ______ *E-mail:* ______

Colégio OBJETIVO

PARA QUEM CURSA O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM 2017

Disciplina: MATEMÁTICA	Prova: DESAFIO	NOTA:

QUESTÃO 16

(OBMEP) – Colocando sinais de adição entre alguns dos algarismos do número 123456789 podemos obter várias somas. Por exemplo, podemos obter 279 com quatro sinais de adição: 123 + 4 + 56 + 7 + 89 = 279. Quantos sinais de adição são necessários para que se obtenha assim o número 72?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

RESOLUÇÃO

Entre cada um dos números 5, 6, 7, 8 e 9, deverá haver sempre um sinal de "+", pois qualquer agrupamento entre eles resulta maior que 72, como se vê nos exemplos:

$$56 + 7 + 8 + 9 = 80 > 72$$
$$5 + 67 + 8 + 9 = 89 > 72$$
$$56 + 7 + 89 = 152 > 72$$

Além disso, deve-se ter um sinal antes do 5, pois 45 + 6 + 7 + 8 + 9 = 75 > 72

Como 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35 e 72 – 35 = 37, precisamos que 1?2?3?4 resulte em 37, o que só é possível no caso 1 + 2 + 34.

Desta forma, a expressão fica:
1 + 2 + 34 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 72, onde foram usados 7 sinais de "+".
Resposta: E

QUESTÃO 17

O valor de $\sqrt[3]{\dfrac{(0{,}005)^2 \ . \ 0{,}000075}{10}} \div \dfrac{5 \ . \ 10^{-4} \ . \ 2^{-\frac{1}{3}}}{3^{-\frac{1}{3}}}$ é:

a) 4 b) 2 c) 1 d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{1}{5}$

RESOLUÇÃO

Notando que:

$(0{,}005)^2 = (5 \ . \ 10^{-3})^2 = 5^2 \ . \ 10^{-6}$

$0{,}000075 = 75 \ . \ 10^{-6} = 3 \ . \ 5^2 \ . \ 10^{-6}$

$3^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **e que** $2^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$**, temos:**

$$\sqrt[3]{\frac{(0{,}005)^2 \ . \ 0{,}000075}{10}} \div \frac{5 \ . \ 10^{-4} \ . \ 2^{-\frac{1}{3}}}{3^{-\frac{1}{3}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{5^2 \ . \ 10^{-6} . \ 3 \ . \ 5^2 \ . \ 10^{-6}}{10}} \div \frac{5 \ . \ 10^{-4} \ . \ \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{5^2 \ . \ 10^{-6} \ . \ 3 \ . \ 5^2 \ . \ 10^{-6}}{10}} \div \frac{5 \ . \ \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} \ . \ 10^4} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{5^3 \ . \ 3 \ . \ 10^{-12}}{2}} \ . \ \frac{\sqrt[3]{2} \ . \ 10^4}{5 \ . \ \sqrt[3]{3}} = \frac{5 \ . \ \sqrt[3]{3} \ . \ 10^{-4}}{\sqrt[3]{2}} \ . \ \frac{\sqrt[3]{2} \ . \ 10^4}{5 \ . \ \sqrt[3]{3}} = 10^{-4} \ . \ 10^4 = 10^0 = 1$$

Resposta: C

QUESTÃO 18

Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

a) 32 b) 36 c) 45 d) 46 e) 48

RESOLUÇÃO

Os números nos bilhetes comprados por Marcelo são da forma 777X, 77X7, 7X77 ou X777, onde X representa algum dos oito algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Em cada um desses casos, há 8 possibilidades para os números dos bilhetes. Por exemplo, no primeiro caso, temos os seguintes oito números: 7771, 7772, 7773, 7774, 7775, 7776, 7778 e 7779. Portanto, o número de bilhetes comprados por Marcelo é 4 x 8 = 32.
Resposta: A

QUESTÃO 19

O número real positivo x que verifica a igualdade $x + 1 = \dfrac{8 - x}{x}$ é:

a) múltiplo de 5
b) divisor de 15
c) par e primo
d) divisor de 21
e) ímpar e primo

RESOLUÇÃO

A equação $x + 1 = \dfrac{8 - x}{x}$ **é fracionária.**

Devemos determinar a condição de existência da fração, e o conjunto universo é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$**. Logo:** $U = \mathbb{R}^*$

Resolvendo a equação, temos:

$$x(x + 1) = 8 - x \Rightarrow x^2 + x = 8 - x \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 6}{2} \begin{cases} x = -4 \text{ (não convém)} \\ x = 2\text{, que é par e primo} \end{cases}$$

Resposta: C

QUESTÃO 20

Considere todas as sequências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas utilizando somente os algarismos 0 e 1. Alguns exemplos dessas sequências são: 00000, 11111, 00111, 01010 etc.

Quantas dessas sequências possuem exatamente três zeros em posições consecutivas?

a) 3
b) 5
c) 8
d) 12
e) 16

RESOLUÇÃO

1) As sequências com apenas 3 zeros, todos consecutivos, são:

$\boxed{\textbf{00011}}$, $\boxed{\textbf{10001}}$, $\boxed{\textbf{11000}}$.

2) As sequências com apenas 4 zeros, sendo exatamente três deles consecutivos, são:

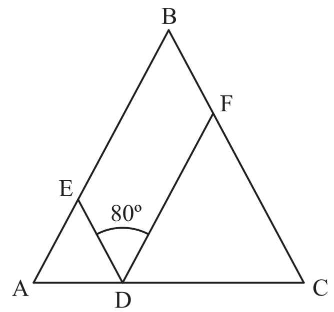
$\boxed{\textbf{01000}}$, $\boxed{\textbf{00010}}$.

3) Existem, portanto, apenas 5 sequências que possuem exatamente três zeros em posições consecutivas.

Resposta: B

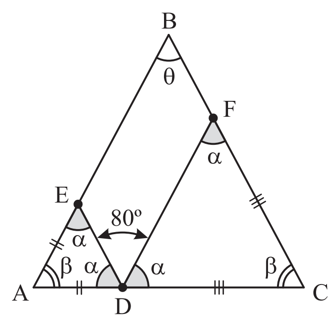
QUESTÃO 21

(FUVEST) – Na figura abaixo, tem-se que AD = AE, CD = CF e BA = BC. Se o ângulo $E\hat{D}F$ mede 80°, então o ângulo $A\hat{B}C$ mede:



a) 20°   b) 30°   c) 50°   d) 60°   e) 90°

RESOLUÇÃO

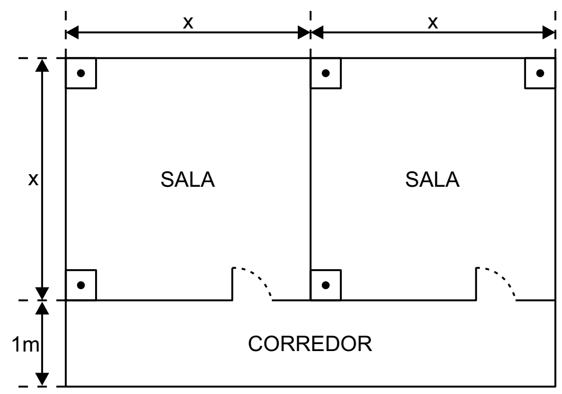


Sejam:
θ a medida, em graus, do ângulo $A\hat{B}C$;
α a medida, em graus, dos ângulos congruentes $A\hat{E}D$, $A\hat{D}E$, $C\hat{D}F$ e $D\hat{F}C$; e
β a medida, em graus, dos ângulos congruentes $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$.

Assim:
1) $\alpha + 80° + \alpha = 180° \Leftrightarrow 2\alpha = 100° \Leftrightarrow \alpha = 50°$
2) $\beta + 2\alpha = 180° \Leftrightarrow \beta + 100° = 180° \Leftrightarrow \beta = 80°$
3) $\theta + 2\beta = 180° \Leftrightarrow \theta + 160° = 180° \Leftrightarrow \theta = 20°$
Resposta: A

QUESTÃO 22

Observe a planta de um escritório formado por duas salas quadradas e um corredor retangular.



Se, desprezando-se as paredes, a área total desse escritório é de 40 m^2, então a área de cada sala, em metros quadrados, é:

a) 9 b) 12 c) 16 d) 18 e) 25

RESOLUÇÃO

Se x for a medida, em metros, do lado de cada quadrado e se 1 e 2x forem as medidas, também em metros, do retângulo, então:

$$x^2 + x^2 + 1 \,.\, 2x = 40 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 40 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{2} \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -5 \Leftrightarrow x = 4, \text{ pois } x \geq 0.$$

A área de cada sala, em metros quadrados, é 4 . 4 = 16.

Resposta: C

QUESTÃO 23

O quociente entre os valores reais de t, para que a metade da expressão $t^2 + 2t + 1$ e a terça parte da expressão $t^2 + 3t + 6$ sejam iguais, é:

a) –1 b) 2 c) 3 d) –2 e) 1

RESOLUÇÃO

Escrevendo em linguagem matemática os termos "metade" e "terça parte" citados no problema, teremos:

$$\frac{t^2 + 2t + 1}{2} = \frac{t^2 + 3t + 6}{3}$$

Reduzindo as expressões ao mesmo denominador comum, encontraremos:

m.m.c. (2,3) = 6

$$\frac{3\,(t^2 + 2t + 1)}{\cancel{6}} = \frac{2\,(t^2 + 3t + 6)}{\cancel{6}}$$

$3t^2 + 6t + 3 = 2t^2 + 6t + 12$, **logo:**

$3t^2 + \cancel{6}t + 3 - 2t^2 - \cancel{6}t - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0$

$t^2 = 9$

$t = \pm\sqrt{9}$

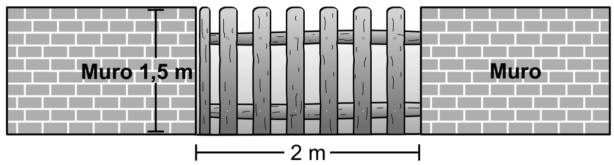
$t = \pm 3$

O quociente entre 3 e – 3 é igual a – 1.

Resposta: A

QUESTÃO 24

Para reforçar a porteira de sua propriedade, João precisa de uma tábua que será colocada na diagonal das tábuas já existentes.

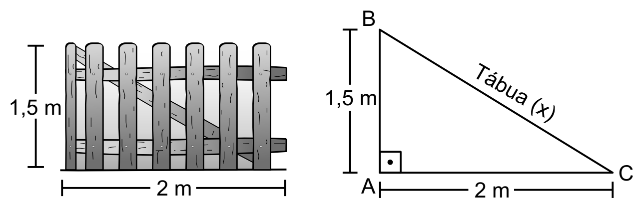


O comprimento dessa tábua deverá ser de:

a) 2.000 cm b) 3,50 m c) 2,0 m
d) 0,0015 km e) 2.500 mm

RESOLUÇÃO

Observando a colocação da tábua, obteremos a figura abaixo:



Aplicando o Teorema de Pitágoras, teremos:

$x^2 = (1,5)^2 + 2^2$

$x^2 = 2,25 + 4$

$x^2 = 6,25$

$x = \pm \sqrt{6,25}$

x = – 2,5 (não convém, pois é negativo)

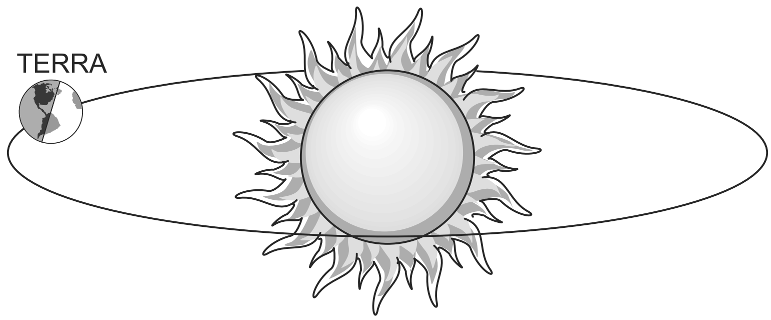
$x = 2,5$

2,5 m = 2.500 mm

Resposta: E

QUESTÃO 25

As trajetórias dos planetas em torno do Sol são elípticas. No caso da Terra, essa trajetória é aproximadamente uma circunferência, com centro no Sol. A distância média da Terra ao Sol é de $15 \cdot 10^7$ km.



Desprezando-se os diâmetros da Terra e do Sol, o comprimento aproximado da órbita da Terra é:

a) $942 \cdot 10^7$ km

b) $94{,}2 \cdot 10^7$ km

c) $9{,}42 \cdot 10^7$ km

d) $706{,}5 \cdot 10^7$ km

e) $70{,}65 \cdot 10^7$ km

RESOLUÇÃO

O comprimento C da órbita da Terra, de acordo com o enunciado, é aproximadamente igual ao de uma circunferência de raio $15 \cdot 10^7$ km. Logo:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 10^7 \text{ km} \Leftrightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \cdot 10^7 \text{ km} \Leftrightarrow C = 94{,}2 \cdot 10^7 \text{ km}$$

Resposta: B

QUESTÃO 26

O valor da expressão numérica $\dfrac{(3{,}01) \times (99{,}91)^2}{999{,}8}$ é, aproximadamente:

a) 3 b) 13 c) 30 d) 130 e) 300

RESOLUÇÃO

Aproximando os valores numéricos da expressão para inteiros, teremos:

$$\frac{3 \times (100)^2}{1000} = \frac{3 \,.\, 10\cancel{000}}{1\cancel{000}} = 30$$

Resposta: C

QUESTÃO 27

(UNESP-2017) – Uma confeitaria vendeu seus dois últimos bolos por R$ 32,00 cada. Ela teve lucro de 28% com a venda de um dos bolos, e prejuízo de 20% com a venda do outro. No total dessas vendas, a confeitaria teve:

a) prejuízo de R$ 1,28
b) lucro de R$ 2,56
c) prejuízo de R$ 2,56
d) lucro de R$ 5,12
e) prejuízo de R$ 1,00

RESOLUÇÃO

Se C_1 e C_2 forem respectivamente os preços, em reais, de custo de cada um dos 2 bolos, então:

$$\begin{cases} 1{,}28 \,.\, C_1 = 32 \\ 0{,}8 \,.\, C_2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 25 \\ C_2 = 40 \end{cases}$$

Assim, o custo dos dois bolos foi de:

(25 + 40) reais = 65 reais

E o valor de venda foi de:

(32 + 32) reais = 64 reais.

Houve, portanto, prejuízo de 1 real.

Resposta: E

QUESTÃO 28

Elevei um número real estritamente positivo ao quadrado, subtrai do resultado o mesmo número e o que restou dividi ainda pelo mesmo número. O resultado que achei foi igual:

a) ao próprio número
b) ao dobro do número
c) ao número mais 1
d) à raiz quadrada do número
e) ao número menos 1

RESOLUÇÃO

Chamando o número positivo de x, teremos que:

$$\frac{x^2 - x}{x} = \frac{\cancel{x} \, . \, (x - 1)}{\cancel{x}} = x - 1$$

Resposta: E

QUESTÃO 29

Rosa e Maria começam a subir uma escada de 100 degraus no mesmo instante. Rosa sobe 10 degraus a cada 15 segundos e Maria sobe 10 degraus a cada 20 segundos.
Quando uma delas chegar ao último degrau, quanto tempo faltará para a outra completar a subida?

a) meio minuto
b) 40 segundos
c) 45 segundos
d) 50 segundos
e) 1 minuto

RESOLUÇÃO

Como 100 degraus é o mesmo que 10×10 degraus, Rosa gastará 15×10 = 150 segundos para chegar ao último degrau da escada.
Maria levará 20×10 = 200 segundos para atingir o topo da escada. Assim, quando Rosa terminar de subir a escada, faltarão 200 – 150 = 50 segundos para Maria completar a subida.
Resposta: D

QUESTÃO 30

Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^3 + 3x^2 + 3x = 2$, então:

a) $x = -1$ b) $x = \sqrt{3} - 1$ c) $x = \sqrt[3]{3}$ d) $x = \sqrt[3]{3} - 1$ e) $x = \sqrt{3}$

RESOLUÇÃO

$\mathbf{x^3 + 3x^2 + 3x = 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2 + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = 3 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3} - 1}$

Resposta: D