Colégio OBJETIVO

Nome: ______ **Nº:** ______
Endereço: ______ **Data:** ______
Telefone: ______ ***E-mail:*** ______

Disciplina: **MATEMÁTICA** | Prova: **DESAFIO** | **RESOLUÇÃO**

PARA QUEM CURSARÁ A 1.ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO EM 2019

QUESTÃO 16

A diferença entre o cubo de um número real positivo e o seu quádruplo, nesta ordem, é igual a quarenta e cinco vezes o seu inverso. O referido número é:

a) Divisível por 3
b) Divisível por 5
c) Divisível por 11
d) Múltiplo de 7
e) Múltiplo de 4

RESOLUÇÃO

I. Traduzindo para a linguagem simbólica, temos a seguinte equação na incógnita x, com x > 0:

$$x^3 - 4x = \frac{45}{x} \Leftrightarrow x^3 - 4x - \frac{45}{x} = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 45 = 0$$

II. Substituindo x^2 por y, com y > 0, temos:
$$y^2 - 4y - 45 = 0$$

III. Resolvendo pelo método da soma e produto das raízes, temos:

$$\text{Soma } (y_1 + y_2) = -\frac{b}{a} = -\frac{(-4)}{1} = 4$$

$$\text{Produto } (y_1 \,.\, y_2) = \frac{c}{a} = -\frac{45}{1} = -45$$

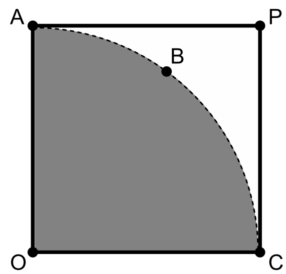
Logo, $y_1 = -5$ e $y_2 = 9$, pois $-5 + 9 = 4$ e $(-5) \,.\, 9 = -45$

IV. Para y = 9, temos $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3 \Leftrightarrow x = 3$, pois x > 0.

Resposta: A

QUESTÃO 17

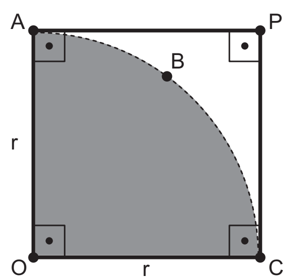
No quadrado APCO a seguir, $\overset{\frown}{ABC}$ é um arco de circunferência de raio **r** cujo centro é o ponto O. A razão entre a área da região não escurecida e a da região escurecida, nesta ordem, é:



a) $\dfrac{\pi}{4}$ b) $\dfrac{4-\pi}{\pi}$ c) $\dfrac{4-\pi}{2}$

d) π e) 1

RESOLUÇÃO



I. Seja r o raio da circunferência de centro O que contém os pontos A, B e C.

II. Sejam S_E a área da região escurecida e S_B a área da região não escurecida, temos:

$$S_E = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

$$S_B = r^2 - \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

$$S_B = \frac{4r^2 - \pi \cdot r^2}{4}$$

$$S_B = \frac{r^2 \cdot (4 - \pi)}{4}$$

III. Logo, a razão entre a área da região não escurecida (S_B) e a da região escurecida (S_E), nesta ordem, é:

$$\frac{S_B}{S_E} = \frac{\dfrac{r^2 \cdot (4 - r)}{4}}{\dfrac{\pi \cdot r^2}{4}} = \frac{r^2 \cdot (4 - \pi)}{4} \cdot \frac{4}{\pi \cdot r^2} = \frac{4 - \pi}{\pi}$$

Resposta: B

QUESTÃO 18

Em um viveiro há várias araras.

• 60% das araras são azuis.
• 40% das araras são vermelhas.
• 40% das araras azuis têm bico branco.
• 30% das araras vermelhas têm bico branco.

Qual a porcentagem de araras do viveiro que têm bico branco?

a) 10%
b) 12%
c) 24%
d) 36%
e) 40%

RESOLUÇÃO

I) Se 40% das araras azuis têm bico branco e estas são 60% do total de araras, então:

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{24}{100}$$ **= 24% das araras são azuis de bico branco.**

II) E, ainda, se 30% das araras vermelhas têm bico branco e estas são 40% do total de araras, então:

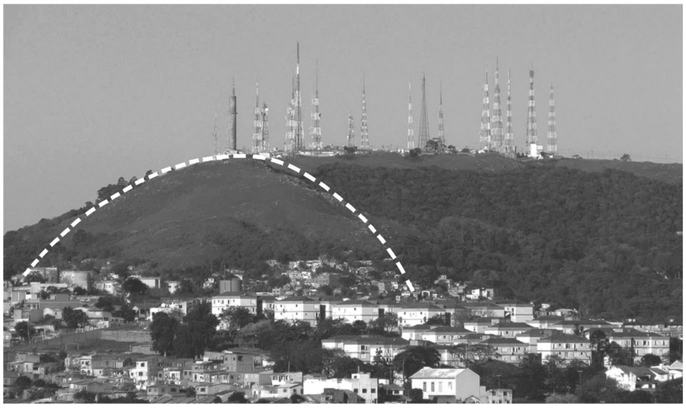
$$\frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{12}{100}$$ **= 12% das araras são vermelhas de bico branco.**

III) Logo, a porcentagem de araras do viveiro que têm bico branco é 24% + 12% = 36%.

Resposta: D

QUESTÃO 19

O morro onde estão situadas as antenas das emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente, de forma aproximada, em um sistema cartesiano, por uma função polinomial de grau 2 da forma $y = ax^2 + bx + c$, com a base da montanha no eixo das abscissas.



Para que fique mais adequada essa representação, devemos ter:

a) $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$
b) $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
c) $a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
d) $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$
e) $a < 0$ e $b^2 - 4ac = 0$

RESOLUÇÃO

I. Percebemos que se trata de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, logo $a < 0$.

II. Como a base da montanha está no eixo das abscissas, temos que a parábola possui duas raízes reais e distintas, ou seja, $\Delta > 0$. Assim, $b^2 - 4ac > 0$.

Resposta: D

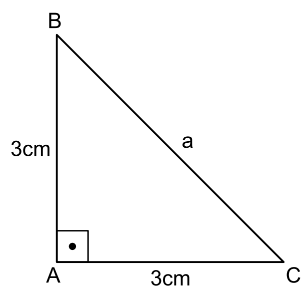
QUESTÃO 20

Seja um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa *a* e catetos b e c. Se a medida do cateto b é 3 cm, então a expressão $\dfrac{a^2}{c}$ será igual a:

a) Dois quintos de 15 cm
b) A terça parte de 15 cm
c) A metade de 30 cm
d) A quinta parte de 40 cm
e) O dobro de 10 cm

RESOLUÇÃO

I. Num triângulo retângulo isósceles, os catetos b e c são congruentes e, portanto, possuem a mesma medida. Desta forma, podemos esboçar este triângulo da seguinte maneira:



II. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$$a^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow a^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow a^2 = 18 \Leftrightarrow a = \sqrt{18}\ (a > 0) \Leftrightarrow$$

Assim, em centímetros, temos: $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{(\sqrt{18})^2}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$

III. Analisando as alternativas, temos:

a) Dois quintos de 15 cm = $\dfrac{2}{5} \cdot 15\text{ cm} = \dfrac{30}{5}\text{ cm} = 6\text{ cm}$

b) A terça a parte de 15 cm = 15 cm : 3 = 5 cm

c) A metade de 30 cm = 30 cm : 2 = 15 cm

d) A quinta parte de 40 cm = $\dfrac{40\text{ cm}}{5} = 8\text{ cm}$

e) O dobro de 10 cm = 2 . 10 cm = 20 cm

Logo, 6 cm equivale a dois quintos de 15 cm.

Resposta: A

QUESTÃO 21

Uma loja de departamentos resolveu montar três kits para as vendas do Natal:
- Uma camisa e uma gravata por R$ 205,00.
- Uma calça e uma camisa por R$ 308,00.
- Uma calça e uma gravata por R$ 233,00.

Se uma pessoa comprar uma calça, uma camisa e uma gravata, gastará o equivalente a:

a) R$ 170,00 b) R$ 175,00 c) R$ 300,00
d) R$ 373,00 e) R$ 746,00

RESOLUÇÃO

I. Sendo x, y e z, em reais, respectivamente os preços da camisa, da gravata e da calça, podemos montar o sistema abaixo com os dados do problema:

$$\begin{cases} x + y = 205 \\ z + x = 308 \\ z + y = 233 \end{cases}$$

II. Somando as três equações, obtemos:
$2x + 2y + 2z = 746$

Simplificando a equação, temos: $x + y + z = 373$, que é o gasto, em reais, na compra de um produto de cada tipo.
Resposta: D

QUESTÃO 22

Os números m e n são tais que $4 \leq m \leq 8$ e $24 \leq n \leq 32$.

O maior valor possível de $\frac{m}{n}$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{8}$

RESOLUÇÃO

I. Para que o quociente m/n seja o maior possível, *m* necessariamente precisa ter o maior valor do seu respectivo intervalo e *n* precisa ter o menor valor, também do seu respectivo intervalo.
II. Sendo assim, para m = 8 e n = 24, temos:

$$\frac{m}{n} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

Resposta: B

QUESTÃO 23

> O matemático Al-Karkhi escreveu um trabalho sobre álgebra, no qual descreve uma técnica de encontrar números racionais x, y, z, não nulos, tais que $x^3 + y^3 = z^2$.
>
> Nesse trabalho, ele utiliza $x = \dfrac{n^2}{1 + m^3}$, y = mx e z = nx, com **m** e **n** números racionais quaisquer, não nulos.
>
> (**Introdução à História da Matemática.** Howard Eves. Ed. UNICAMP. Adaptado.)

Adotando-se m = 2 e sabendo-se que x + y = z, o valor de $(x + y)^z$ é um número:

a) Par
b) Primo
c) Quadrado perfeito
d) Maior que 30
e) Múltiplo de 3

RESOLUÇÃO

I. Para m = 2, temos:

$$x = \frac{n^2}{1 + 2^3} = \frac{n^2}{9}$$

$$y = 2 \cdot \frac{n^2}{9}$$

$$z = \frac{n^3}{9}$$

II. Como temos que x + y = z, então:

$$\frac{n^2}{9} + \frac{2n^2}{9} = \frac{n^3}{9} \Leftrightarrow \frac{3n^2}{9} = \frac{n^3}{9} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ **n = 3, pois** $n \neq 0$

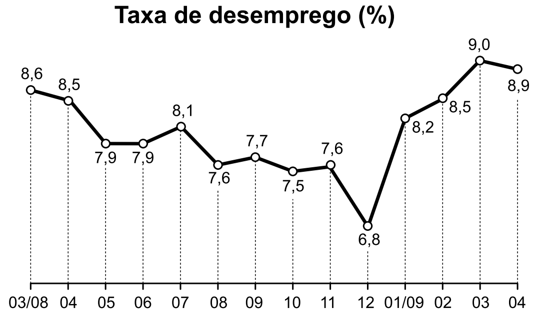
Se m = 2 e n = 3, então:

$$x = \frac{3^2}{9} = 1 \;;\; y = \frac{2 \cdot 3^2}{9} = 2; \; z = \frac{3^3}{9} = 3$$

O valor de $(x + y)^z$ é $(1 + 2)^3 = 27$
Resposta: E

QUESTÃO 24

O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.



(IBGE. *Pesquisa mensal de emprego*. Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 30 jul. 2012. Adaptado.)

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

a) 8,1%
b) 8,0%
c) 7,9%
d) 7,7%
e) 7,6%

RESOLUÇÃO

O rol das taxas de desemprego (%), no período de março de 2008 a abril de 2009, é:

6,8; 7,5; 7,6; 7,6; 7,7; 7,9; $\boxed{7,9;\ 8,1}$; 8,2; 8,5; 8,5; 8,6; 8,9; 9,0

Como a mediana é a média entre os dois elementos centrais do rol, neste caso é:

$$\frac{7,9 + 8,1}{2} = 8,0(\%)$$

Resposta: B

QUESTÃO 25

O numero real x (x>0), tal que $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{x}}}}} = 4$, é:

a) Par

b) Múltiplo de 3

c) Divisível por 5

d) Menor que 20

e) Maior que 32

RESOLUÇÃO

I. Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{x}}}}} = 4 \Leftrightarrow 13+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{x}}}} = 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{x}}}} = 16-13 \Leftrightarrow \sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{x}}}} = 3$$

II. Fazendo este mesmo processo para simplificar os radicais, temos:

$$7+\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{x}}} = 3^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{x}}} = 9-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{x}}} = 2 \Leftrightarrow 1+\sqrt{4+\sqrt{x}} = 2^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4+\sqrt{x}} = 4-1 \Leftrightarrow \sqrt{4+\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow 4+\sqrt{x} = 3^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 9-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 5^2 \Leftrightarrow x = 25\text{, que é divisível por 5.}$$

Resposta: C

QUESTÃO 26

O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do gráfico 1.

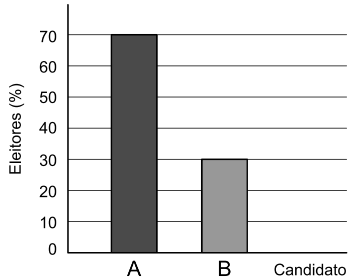


Gráfico 1

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o gráfico 2.

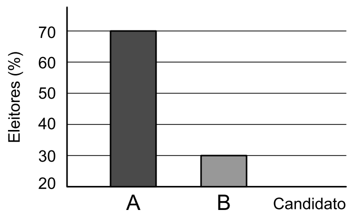


Gráfico 2

Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões das alturas das colunas B e, nesta ordem, A nos gráficos 1 e 2 é:

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{15}$ e) $\frac{8}{35}$

RESOLUÇÃO

$$\frac{30}{70} - \frac{10}{50} = \frac{3}{7} - \frac{1}{5} = \frac{8}{35}$$

Resposta: E

QUESTÃO 27

Se n é um número natural maior que 1, a expressão $\sqrt[n]{\dfrac{20}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$ é igual a:

a) $\dfrac{4}{n}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{n}{4}$ d) $\dfrac{1}{2n}$ e) $\dfrac{1}{2}$

RESOLUÇÃO

Aplicando as propriedades das potências e dos radicais, temos:

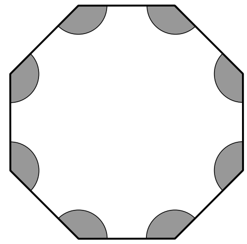
$$\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\frac{20}{4^n \cdot 4^2 + 2^{2n} \cdot 2^2}} = \sqrt[n]{\frac{20}{16 \cdot 4^n + 4 \cdot 4^n}} = \sqrt[n]{\frac{20}{4^n \cdot (16 + 4)}} =$$

$$= \sqrt[n]{\frac{20}{4^n \cdot 20}} = \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}$$

Resposta: B

QUESTÃO 28

Dado o polígono regular:



Cada ângulo interno mede:

a) Exatamente 135º

b) Entre 110º e 135º, excluídos

c) Mais de 150º

d) Exatamente 110º

e) Entre 135º e 150º, excluídos

RESOLUÇÃO

I. O polígono tem 8 lados, portanto se trata de octógono regular.

II. A soma S_i dos ângulos internos de um polígono regular de n lados é dada por:

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

Para o octógono, temos n = 8, logo:

$S_i = (n - 2) \cdot 180° \Leftrightarrow S_i = (8 - 2) \cdot 180° = 6 \cdot 180° = 1080°$

III. Cada ângulo interno a_i mede:

$$a_i = \frac{1080°}{8} = 135°$$

Resposta: A

QUESTÃO 29

Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que faria três perguntas a cada um deles e cada um deles daria apenas uma resposta correta.

Ela perguntou:

– Que dia da semana é hoje?
– Hoje é quinta, disse João.
– É sexta, respondeu Maria.

Depois, perguntou:

– Que dia da semana será amanhã?
– Segunda, falou João.
– Amanhã será domingo, disse Maria.

Finalmente, ela perguntou:

– Que dia da semana foi ontem?
– Terça, respondeu João.
– Quarta, disse Maria.

Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

a) segunda-feira
b) terça-feira
c) quarta-feira
d) quinta-feira
e) sexta-feira

RESOLUÇÃO

I) A tabela a seguir mostra o que João e Maria, de forma indireta, dizem do dia da semana em que a brincadeira ocorreu.

Pergunta	João	Maria
primeira	**quinta**	**sexta**
segunda	**domingo**	**sábado**
terceira	**quarta**	**quinta**

II) Como, pelo enunciado, João e Maria deram a resposta correta exatamente uma única vez, concluímos que a brincadeira aconteceu em uma quinta-feira.

Resposta: D

QUESTÃO 30

O número real **a** ($a \neq 0$) é tal que $a - \frac{1}{a} = 10$. Os números $a^2 + \frac{1}{a^2}$ e $a^3 - \frac{1}{a^3}$ valem, respectivamente:

a) 100 e 200
b) 100 e 300
c) 100 e 1000
d) 102 e 1000
e) 102 e 1030

RESOLUÇÃO

I. Se $a - \frac{1}{a} = 10$, então, elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 10^2 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2 \,.\, a \,.\, \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 100 \Leftrightarrow a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 100 + 2 \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 102$$

II. Se $a - \frac{1}{a} = 10$ e $a^2 + \frac{1}{a^2} = 102$, então:

$$\left(a - \frac{1}{a}\right) \,.\, \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 10 \,.\, 102 \Leftrightarrow a^3 - a + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} = 1020 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} = 1020 + \left(a - \frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} = 1020 + 10 \Leftrightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} = 1030$$

Resposta: E